富山大学工学部紀要第27巻　1976

非線形計画法を用いた離散値系の最適低次元近似モデルについて

佐々木基文

Optimal Reduced Order Models of Linear, Discrete-Time Systems by Non-Linear Programming

Motofumi Sasaki

A method is proposed by which a linear, discrete-time, high-order system can be reduced to a number of optimal low-order models by dividing the total time of response into a number of smaller intervals. It is based on the application of the non-linear programming to estimate the parameters of the model which minimize the sum of squared output errors of the impulse response with a weighting function. Non-linear programming is used to optimize the same number of parameters as the order of the reduced-order model. If a certain condition is satisfied, it is shown that we can obtain the optimal reduced-order model which is stationarily equivalent to the system with respect to a unit step input, although approximation is based on the impulse response. The proposed method is applicable to time delay systems and multiple input-single output systems.

1. 緒　　言

高次元の系を低次元のモデルで近似することは現代最適制御理論を実際に適用する場合非常に重要なことである。離散値系の最適低次元近似モデルについての研究はいくつかみられる。[1]~[4]有限個の入出力データを用いて低次元近似モデルを得る手法[1]~[3]は定常状態において系を解析し設計する必要があるときはあまり有効でなく、かといって無限個のMarkov parameterを用いて単なるインパルス応答の出力誤差の二乗和を規範として低次元近似モデルを得る手法[4]は過渡状態において近似精度の悪いモデルを得る場合が多い。考える全応答区間〔0, ∞）にわたって「行儀の悪い系」は一つの低次元近似モデルで解析設計するよりはむしろ全応答区間をいくつかに区切ってそれぞれの低次元近似モデルを考えた方が近似の精度を重視する観点からも非常に興味あることである。例えば大気汚染質の予測問題をあげれば系を短期（過渡的な部分）、中期（過渡的な部分と定常的な部分の中間）、長期（定常的な部分）の3つのモデルに分割して大気汚染質を予測する必要がある。[5]

ここでは、1入力1出力系についてインパルス応答の出力誤差の二乗和に重みを考慮した評価関数を設定し非線形計画法を適用して重みのパラメータを変えることによって短期、中期、長期のそれぞれについて最適な低次元近似モデルを得る手法を述べる。非線形計画法は一般に低次元近似モデルの極に等しい数（極が重複するときはそれだけ減少する）のパラメータを最適化するのに適用される。近似モデルに極を指定することは可能であり、ある種の条件が満たされればステップ入力に関して系に定常等価な最適低次元近似モデルが得られる。本手法はまたむだ時間を含む系や多入力1出力系にも適用できる。

2. 問題の記述

つぎの1入力1出力系

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1)&=\mathbf{A}\mathbf{x}(k)+\mathbf{b}u(k)\\ y(k)&=\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}(k)\end{aligned}\qquad (S)$$

を考える。ここに、$u(k)$および$y(k)$はそれぞれスカラー入力およびスカラー出力であり、$\mathbf{x}(k)$は$n\times 1$状態ベクトルである。$\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$および$\mathbf{c}$は適当なサイズをもつ行列およびベクトルとし、$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$はベクトル$\mathbf{c}$の転置ベクトルを表わす。kは整数で$k\in[0,\infty)$である。系Sはまたパルス伝達関数を用いて

$$G(z)=\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$$

と表わすことができる。ここに、$(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$は行列$(z\mathbf{I}-\mathbf{A})$の逆行列を、$\mathbf{I}$は適当なサイズをもつ単位行列を表わす。Markov parameter Y_kはパルス伝達関数$G(z)$を$z=\infty$のまわりで展開したときの係数として定義され系Sでは

$$Y_k=\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b}$$

となる。

以下、説明を簡単にするために、考える系Sは漸近安定ですべて相異なる実の固有値をもつものとする。

適当な変換行列$\mathbf{T}$を用いてシステム行列$\mathbf{A}$を

$$\mathbf{\Lambda}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$$

と変換すれば、Markov parameter Y_kは

$$\begin{aligned}Y_k&=\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}\mathbf{\Lambda}^{k-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}\\ &=tr[(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{T})\mathbf{\Lambda}^{k-1}]\\ &=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\alpha_i^{k-1}\end{aligned}$$

と書ける。ここに、γ_iは系Sのパルス伝達関数の第i番目の留数で行列$(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{T})$の第$(i,i)$要素であり、$\alpha_i$は第$i$番目の極で行列$\mathbf{\Lambda}$の第$(i,i)$要素である。

最適低次元近似モデル問題はつぎの評価関数

$$J=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^{1-k}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\alpha_i^{k-1}-\sum_{i=1}^{r}\bar{\gamma}_i\bar{\alpha}_i^{k-1}\Big\}^2$$

を最小にするような$\bar{\gamma}_i$および$\bar{\alpha}_i$を求めることである。ここに、$\bar{\alpha}_i$および$\bar{\gamma}_i$はそれぞれ低次元近似モデルのパルス伝達関数$G_r(z)$の第i番目の極および第i番目の留数であり、rは低次元近似モデルの次数を意味する$(r<n)$。荷重関数α^{1-k}のパラメータαは正数であるがさらに、Jが存在するためにはつぎの条件を満たさなければならない。

$$\alpha>max\{|\alpha_i\alpha_j|,\ |\alpha_i\bar{\alpha}_l|,\ |\bar{\alpha}_l\bar{\alpha}_m|\}$$

$$i,j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$$

$$l,m=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ r$$

最適な低次元近似モデルを状態空間表示で直接求めようとすれば、一般に$r(r+2)$個のパラメータを最適化しなければならないが[1),(4)]パルス伝達関数表示で求めようとすると$2r$個のパラメータを最適化すればよい。[(2),(3)]次節に述べる非線形計画問題に帰着する方法によれば、最適低次元近似モデル問題は本質的に低次元近似モデルの次数に等しい数のパラメータを最適化する問題となる。

3. 最適化

低次元近似モデルのMarkov parameterを

$$\bar{Y}_k=\sum_{i=1}^{r}\bar{\gamma}_i\bar{\alpha}_i^{k-1}$$

とおき、評価関数を展開すると

$$\begin{aligned}J&=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^{1-k}(Y_k-\bar{Y}_k)^2\\ &=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^{1-k}Y_k^2-2\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^{1-k}Y_k\bar{Y}_k+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^{1-k}\bar{Y}_k^2\end{aligned}$$

となる。上式の右辺各項をベクトル—行列形式で

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^{1-k}Y_k^2&=\mathbf{r}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{r}\\ \sum_{k=1}^{\infty}\alpha^{1-k}Y_k\bar{Y}_k&=\mathbf{r}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{p}}\\ \sum_{k=1}^{\infty}\alpha^{1-k}\bar{Y}_k^2&=\bar{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{r}}\end{aligned}$$

と書けばJは

$$J=\mathbf{r}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{r}-2\bar{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{p}}+\bar{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{r}}\qquad(1)$$

となる。ここに、

$$\mathbf{r}^{\mathrm{T}}=[\gamma_1,\ \gamma_2,\ \cdots\cdots,\ \gamma_n]$$

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1/(1-\alpha_1^2/\alpha), & 1/(1-\alpha_1\alpha_2/\alpha), & \cdots, & 1/(1-\alpha_1\alpha_n/\alpha)\\ 1/(1-\alpha_1\alpha_2/\alpha), & 1/(1-\alpha_2^2/\alpha), & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \\ 1/(1-\alpha_1\alpha_n/\alpha), & \cdots\cdots & \cdots, & 1/(1-\alpha_n^2/\alpha)\end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}=[\bar{\gamma}_1,\ \bar{\gamma}_2,\ \cdots\cdots,\ \bar{\gamma}_n]$$

$$\bar{\mathbf{p}}^{\mathrm{T}}=\Big[\sum_{i=1}^{n}\gamma_i/(1-\alpha_i\bar{\alpha}_1/\alpha),\ \sum_{i=1}^{n}\gamma_i/(1-\alpha_i\bar{\alpha}_2/\alpha),\ \cdots,\ \sum_{i=1}^{n}\gamma_i/(1-\alpha_i\bar{\alpha}_r/\alpha)\Big]$$

$$\bar{\mathbf{P}}=\begin{bmatrix}1/(1-\bar{\alpha}_1^2/\alpha), & 1/(1-\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2/\alpha), & \cdots, & 1/(1-\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_r/\alpha)\\ 1/(1-\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2/\alpha), & 1/(1-\bar{\alpha}_2^2/\alpha), & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \\ 1/(1-\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_r/\alpha), & \cdots\cdots & \cdots, & 1/(1-\bar{\alpha}_r^2/\alpha)\end{bmatrix}$$

であり、$\mathbf{P}$および$\bar{\mathbf{P}}$はそれぞれ正定対称行列である。評価関数Jは$\bar{\mathbf{r}}$について二次形式で$\bar{\mathbf{P}}$は正定対称行列であるから、

$$\frac{\partial J}{\partial\bar{\mathbf{r}}}=2\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{r}}-2\bar{\mathbf{p}}=\mathbf{0}\qquad(2)$$

より最適な留数ベクトルは

$$\bar{\mathbf{r}}^{*}=\bar{\mathbf{P}}^{-1}\bar{\mathbf{p}} \tag{3}$$

と求めることができる。ここに、$\mathbf{0}$は適当なサイズをもつ零ベクトルである。(3) 式を (1) 式の右辺 $\bar{\mathbf{r}}$に代入して

$$J^{*}=\mathbf{r}^{T}\mathbf{P}\mathbf{r}-\bar{\mathbf{p}}^{T}\bar{\mathbf{P}}^{-1}\bar{\mathbf{p}} \tag{4}$$

を得る。したがって、最適低次元近似モデル問題は低次元近似モデルの次数に等しい r 個のパラメータ ($\bar{\alpha}_i$; $i=1,2,\cdots,r$) を決定する非線形計画問題に帰着された。もし必要ならば J^{*}の勾配ベクトルは

$$\frac{\partial J^{*}}{\partial\bar{\alpha}}=2\begin{bmatrix}\bar{\gamma}_1^{*}\left\{\sum_{i=1}^{r}\frac{\bar{\gamma}_i^{*}(\bar{\alpha}_i/\alpha)}{(1-\bar{\alpha}_i\bar{\alpha}_1/\alpha)^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i(\alpha_i/\alpha)}{(1-\alpha_i\bar{\alpha}_1/\alpha)^2}\right\}\\ \bar{\gamma}_2^{*}\left\{\sum_{i=1}^{r}\frac{\bar{\gamma}_i^{*}(\bar{\alpha}_i/\alpha)}{(1-\bar{\alpha}_i\bar{\alpha}_2/\alpha)^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i(\alpha_i/\alpha)}{(1-\alpha_i\bar{\alpha}_2/\alpha)^2}\right\}\\ \vdots\\ \vdots\\ \bar{\gamma}_r^{*}\left\{\sum_{i=1}^{r}\frac{\bar{\gamma}_i^{*}(\bar{\alpha}_i/\alpha)}{(1-\bar{\alpha}_i\bar{\alpha}_r/\alpha)^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i(\alpha_i/\alpha)}{(1-\alpha_i\bar{\alpha}_r/\alpha)^2}\right\}\end{bmatrix}$$

と求めることができる。ここに、

$$\bar{\alpha}^{T}=[\bar{\alpha}_1,\ \bar{\alpha}_2,\ \cdots\cdots,\ \bar{\alpha}_r]$$
$$\bar{\mathbf{r}}^{*T}=[\bar{\gamma}_1^{*},\ \bar{\gamma}_2^{*},\ \cdots\cdots\cdots,\bar{\gamma}_r^{*}]$$

である。

最適な極 α_i^{o} および留数 γ_i^{o} が求まれば完全可制御完全可観測な r 次の最適低次元近似モデルは状態空間表示として例えば

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_r(k+1)&=\mathbf{A}_r\mathbf{x}_r(k)+\mathbf{b}_r u(k)\\ y_r(k)&=\mathbf{c}_r^{T}\mathbf{x}_r(k)\end{aligned} \tag{M}$$

と表わすことができる。ここに、$y_r(k)$ はスカラー出力で $\mathbf{x}_r(k)$ は $r\times 1$ 状態ベクトルで $\mathbf{A}_r$, $\mathbf{b}_r$および $\mathbf{c}_r$はそれぞれ

$$\mathbf{A}_r=diag[\alpha_1^{o},\ \alpha_2^{o},\ \cdots\cdots,\ \alpha_r^{o}]$$
$$\mathbf{b}_r^{T}=[1,1,\cdots\cdots,\ 1]$$
$$\mathbf{c}_r^{T}=[\gamma_1^{o},\ \gamma_2^{o},\ \cdots\cdots,\ \gamma_r^{o}]$$

である。

本手法は極をすべてあるいは部分的に指定することができる。極をすべて指定すれば、(1) 式を直接目的関数とする非線形計画問題として解を求めるかあるいは (2) 式の連立一次方程式を直接解くことになる。このとき (4) 式は極の指定の良さを示す measure として有効である。極を部分的に m 個 ($<r$) 指定すると (4) 式は残りの ($r-m$) 個のパラメータについて最小化することになる。極の指定として連分数展開による近似モデルの根と系の代表固有値の両者の組合せが考えられ留数最適化によってかなり精度の良い低次元近似モデルが得られることが連続系の場合に数値例によってたしかめられている。[6]

いま最適な低次元近似モデルの Markov parameter を Y_k^{o} と表わせば評価関数の最小値 J^{o} は

$$J^{o}=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^{1-k}Y_k^2-\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^{1-k}(Y_k^{o})^2$$

となる。これは最小自乗法の重要な一つの特徴で、振動的な系を非振動的なモデルで近似したり逆に非振動的な系を振動的なモデルで近似したりする原因となっているが (文献(4) の例題参照)、本方法によればこのような欠点はない。

$\alpha=1$ のとき得られる最適低次元近似モデルはすべての離散時刻 $k\in[0,\ \infty)$ にわたって最適化するために、特に過渡応答あるいは定常応答だけに注目したいときは実際上精度の点で不都合なモデルである場合が少くない。例えば大気汚染質の予測問題で系を短期、中期、長期の3つのモデルに分割する必要があるがこれらのモデルは精度の高いものであることが望まれる。[5] 本手法によれば α の値を変えることによって過渡応答 (あるいは定常応答) に強いモデルを得ることができる。すなわち α を1より大きく選ぶと $\alpha=1$ のときに得られる低次元近似モデルより過渡応答において精度の高い低次元近似モデルを得る。また逆に α を評価関数 J が存在するための条件を満たし1より小さく選ぶと $\alpha=1$ として得られる低次元近似モデルよりも定常応答の良好な近似モデルを得る。また $\bar{\alpha}_r$を指定し $\alpha=\bar{\alpha}_r$と選べれば、留数最適化条件より

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{1-\alpha_i}=\sum_{i=1}^{r}\frac{\bar{\gamma}_i}{1-\bar{\alpha}_i}$$

を得るが、これはステップ入力に関して系 S と低次元近似モデルが定常等価となるための必要十分条件である。このような事情から場合によっては $\alpha=1$ のときに得られる最適低次元近似モデルは過渡的状態と定常的状態の中間の中期モデルとして用いることが考えられる。

系 S が複素固有値をもつ場合、複素共役パラメータを除いて本節で得られた結果の式の形は変わらない。また重複固有値をもつ場合も本手法は有効であるが結果の式の形は上で得られたものとは少し異なる。系が不安定であれば評価規範の総和の上限を適当な有限値 $k=N$ として上と同様の取扱いが可能で

ある。

本手法はまたむだ時間を含む系や多入力1出力系にも適用できる。

4. 数値例

つぎのようなパルス伝達関数

$$G(z)=\frac{z^{-1}}{1-0.962z^{-1}}+\frac{z^{-1}}{1-0.998z^{-1}}$$

をもつ2次の系を最適な1次のモデルに近似することを考える。

$\alpha=1$ のときの最適な1次のモデルは前節より

$$G_{r,1}(z)=\frac{1.210z^{-1}}{1-0.9976z^{-1}}$$

と得る。これは過渡特性の非常に悪いモデルである。

したがって過渡特性の良好なモデルは $\alpha=1.1$ として

$$G_{r,2}(z)=\frac{1.967z^{-1}}{1-0.9846z^{-1}}$$

と得る。

また，定常特性の良好なモデルは例えば $\alpha=0.998$ として

$$G_{r3}(z)=\frac{1.105z^{-1}}{1-0.9979z^{-1}}$$

を得る。

5. 結　言

非線形計画法を用いた離散値系の最適低次元近似モデルを得る手法を述べた。荷重関数のパラメータ α を1より大きく選ぶかあるいは小さく選ぶことによってそれぞれ過渡応答あるいは定常応答の非常に良好な最適低次元近似モデルを得ることができることを述べ、また α がある種の条件を満足するように選べればステップ入力に関して系 S に定常等価な最適低次元近似モデルが得られることを示し、数値例によって本手法の妥当性をたしかめた。

ここで得られた $\alpha=1$ のときの最適低次元近似モデルはまた $\varepsilon-$practically controllable and observable なモデルともいえよう。[7]

参考文献

(1) Andersón, J. H : Geometrical approach to reduction of dynamical systems ; Proc. IEE, Vol. 114, No. 7, 1014/1018 (1967)

(2) Sinha, N. K., Pille, W. : A new method for reduction of dynamic systems ; Int. J. Control, Vol. 14, No. 1, 111/118 (1971)

(3) 谷萩：線形計画法による高次系の低次元近似モデルの構成；システムと制御，Vol. 18, No. 5, 314/315 (1974)

(4) Aplevich, J. D. : Approximation of discrete linear systems ; Int. J. Control, Vol. 17, No3, 565/575 (1973)

(5) 添田，石原：非物理モデルによる環境汚染質レベルの予測と観測時点の決定；シミュレーション技術研究会，1/20 (1974)

(6) Riggs, J. B., Edgar, T. F. : Least squares reduction of linear systems using impulse response ; Int. J. Control, Vol. 20, No. 2, 213/223 (1974)

(7) 古田，河：線形系の次数の同定法；計測自動制御学会制御理論シンポジウム，103/108 (昭47. 6)